Módulo de Matemáticas Académicas II
Módulo de Matemáticas Aplicadas II
Nivel II de ESPAD

Unidad 2

Proporcionalidad

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR del Alcorcón en las opciones de **enseñanzas académicas** o **enseñanzas aplicadas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

6- Proporcionalidad del libro MATEMÁTICAS 4º B de ESO (Autora: Nieves Zuasti)

6- Proporcionalidad del libro MATEMÁTICAS 3ºA de ESO (Autora: Nieves Zuasti)

8- Magnitudes proporcionales. Porcentajes. MATEMÁTICAS 2ºA de ESO (Autora: Nieves Zuasti)

ÍNDICE

1. RAZÓN Y PROPORCIÓN

Una **razón** es el cociente de dos números: $\frac{a}{b}$ (se lee "**a es a b**")

El primer término de la razón, a, se llama **antecedente** y el segundo término, b, **consecuente**. Ambos términos puedes ser números reales enteros o decimales.

La razón se usa en estos términos como comparación entre los valores de dos variables.

Por ejemplo, los números 75 y 100 están en razón de 3 es a 4, ya que su razón $\frac{75}{100}$ equivale a $\frac{3}{4}$

Los términos "razón" y "fracción" son casi sinónimos puesto que ambos significan cociente de números, pero las diferencias de matiz en sus significados están en el contexto en el que se usan:

- Una fracción se usa para expresar una parte de un todo, de una única magnitud, mediante el numerador de la fracción se indica las partes que se toman y con el denominador el total de partes en las que se ha dividido ese todo. Así, por ejemplo, decimos que si un depósito de 100 litros de capacidad contiene 75 litros de agua, está lleno hasta las ¾ parte de su capacidad.
- Una razón se usa como comparación entre dos magnitudes distintas y los términos de la razón se refieren a cantidades de cada una de las dos magnitudes. Así, por ejemplo, si las personas asistentes a un concierto son 75 varones y 100 mujeres, decimos que la razón entre varones y mujeres es "de 3 es a 4", o que hay 3 hombres por cada 4 mujeres.

Otros ejemplos de razón:

1. Si 10 personas consumen 500 litros de agua en un día, la razón entre el consumo y el número de personas es 500:10= 50 litros por persona (razón de $\frac{50}{1}$)
2. Si hemos comprado 5 kg de naranjas por 4€, podemos establecer la relación entre el precio y el peso, 4:5= 0,8 €/kg. La razón entre euros y kilogramos es $\frac{4}{5}$. También puede darse la razón inversa $\frac{5}{4}$ entre el peso y el precio, 5:4= 1,25 kg/€.

Una **proporción** es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (se lee "a es a b como c es a d")

Los términos a y d se llaman **extremos** y los términos b y c se llaman **medios** de la proporción

Por ejemplo, la proporción $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ se lee "75 es a 100 como 3 es a 4"

Actividades propuestas 1

1. Completa las siguientes expresiones de proporcionalidad con el número que falta:
   a. 12 es a 36 como 1 es a …
   b. 8 es a 20 como … es a 5
   c. 270 es a … como 3 es a 7
   d. … es a 45 como 2 es a 5
2. Medio kilo de cerezas cuesta 1,90 €. ¿Cuál es la razón entre kilos y euros?
3. Calcula el valor de x en las siguientes proporciones:
   a. $\frac{6}{42}=\frac{13}{x}$
   b. $\frac{48}{36}=\frac{x}{45}$

2. RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD ENTRE MAGNITUDES

Llamamos **magnitud** a cualquier cualidad de los objetos que se pueda medir. Así, longitud, peso, velocidad, precio son ejemplos de magnitudes a las que se puede asignar una cantidad numérica y unas unidades (una cuerda puede medir 1,5 metros, se pueden comprar 3 kg de naranjas, etc)

Entre algunas magnitudes existen relaciones de dependencia que reciben el nombre de relaciones de proporcionalidad, que puede ser directa o inversa, y que se son muy útiles en la resolución de algunos problemas porque permiten hallar el valor de una de las magnitudes conocido el valor de la otra.

2.1. Relación de proporcionalidad directa

Dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

magnitud A	**a**	**2·a**	**3·a**	**...**	**n·a**
magnitud B	**b**	**2·b**	**3·b**	**...**	**n·b**

Si las magnitudes A y B son directamente proporcionales **el cociente de dos valores correspondientes es siempre el mismo**. El valor de este cociente constante entre ambas magnitudes se llama **razón o constante de proporcionalidad directa:** $k = \frac{a}{b}$

Ejemplo→ El número de personas y la cantidad de agua que consumen son magnitudes directamente proporcionales (triple número de personas consumen triple cantidad de agua, si el número de personas se reduce a la mitad también se reduce a la mitad el consumo de agua, etc.). Sabiendo que 10 personas consumen 500 litros de agua en un día es fácil hallar el valor de una de las magnitudes sabiendo que el valor de la otra se ha multiplicado o dividido por un número, como se ha hecho para completar la siguiente tabla:

litros	500	1500	250	50	100
nº de personas	10	30	5	1	2

La razón de proporcionalidad entre el número de litros y el número de personas es $k = \frac{500}{10} = \frac{1500}{30} = \frac{250}{5} = \frac{50}{1} = \frac{100}{2} = 50$ l/persona.

En los problemas de proporcionalidad directa se da el valor de cada una de las dos magnitudes en una situación y se pide calcular el valor de una de las magnitudes conocido el valor de la otra en una situación distinta. Para resolver el problema solamente hay que establecer la proporción o igualdad de razones entre los valores de ambas magnitudes (tres de ellos conocidos y el cuarto desconocido al que llamamos x) y aplicar lo que sabemos sobre fracciones equivalentes. Este procedimiento para hallar el cuarto término de una proporción directa entre dos magnitudes suele enseñarse de manera mecánica como un algoritmo denominado "***regla de tres directa***".

Ejemplo→ Quince paquetes iguales pesan 330 kg, ¿cuántos kg pesan 6 paquetes?

	Peso (kg)	nº de paquetes
1ª situación	330	15
2ª situación	x	6

Razonamos que las magnitudes peso (kg) y número de paquetes son directamente proporcionales y que, por lo tanto, los cocientes o razones entre ambas magnitudes tienen que ser iguales en ambas situaciones: $\frac{x}{6} = \frac{330}{15}$

Podemos obtener el valor de x a partir de la igualdad de los productos cruzados:

$\frac{x}{6}=\frac{330}{15} \Rightarrow 15\cdot x=330\cdot 6 \Rightarrow 15\cdot x=1980 \Rightarrow x=\frac{1980}{15}=132$. Luego 6 paquetes pesan 132 kg.

Para aplicar mecánicamente la regla de tres directa se suelen disponer los datos de la siguiente forma: 330 kg ⟶ 15 paquetes x kg ⟶ 6 paquetes	y se escriben directamente las operaciones que dan el valor de x : multiplicar en cruz y dividir por el tercer término: $x=\frac{330\cdot 6}{15}=\frac{1980}{15}=132\ \text{kg}$

Otro razonamiento alternativo, muy sencillo y útil en problemas de proporcionalidad directa como el de este ejemplo, es el **método de reducción a la unidad**, que consiste en calcular primero el valor de una de las magnitudes asociado al valor unidad de la otra y a partir de ese valor calcular cualquier otro par de valores correspondientes:

Calculamos lo que pesa 1 paquete: $\frac{330}{15}=22\ \text{kg}$ .Sabiendo lo que pesa 1 paquete sólo hay que multiplicar para hallar el peso de 6 paquetes: $22\cdot 6=132\ \text{kg}$

El método de reducción a la unidad puede ser el más adecuado para problemas de proporcionalidad en el que intervienen más de dos magnitudes, como el siguiente:

Ejemplo→ Nueve personas han gastado en transporte 630 € en 20 días. ¿Cuánto gastarán 24 personas en 8 días realizando el mismo recorrido?

Calculamos lo que ha gastado cada persona en los 20 días: $\frac{630}{9}=70$ €.

Calculamos lo que gasta 1 persona en 1 día: $\frac{70}{20}=3{,}50$ € por persona y día.

Calculamos lo que gastan 24 personas en 8 días: $3{,}50\cdot 24\cdot 8=672$ €

Actividades propuestas 2

1. Si 150 gramos de jamón cuestan 6 €, ¿cuánto costarán 250 gramos?
2. Un grifo abierto durante 5 minutos hace que el nivel de un depósito suba 20 cm. ¿Cuánto subirá el nivel si el grifo se abre durante 7 minutos?
3. Un coche ha recorrido 12 km en los últimos 9 minutos. Si sigue a la misma velocidad, ¿cuántos kilómetros recorrerá en los próximos 30 minutos?
4. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de fresa necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fresas. Queremos hacer 5 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fresas debemos poner?
5. La altura de un árbol es proporcional a su sombra (a una misma hora). Un árbol que mide 1,2 m tiene una sombra de 2,1 m. ¿Qué altura tendrá un árbol cuya sombra mida 4,2 m?

2.2. Relación de proporcionalidad inversa

Dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

magnitud A	a	2·a	3·a	…	n·a
magnitud B	b	b:2	b:3	…	b:n

Si las magnitudes A y B son inversamente proporcionales **el producto de dos valores correspondientes es siempre el mismo** (el valor de este producto se llama "**constante de proporcionalidad inversa**": $k' = a \cdot b$)

Ejemplo 1→ La velocidad a la que se recorre un trayecto fijo y el tiempo que se tarda en hacer el recorrido son magnitudes inversamente proporcionales (a doble velocidad se reduce el tiempo empleado a la mitad, a mitad velocidad se duplica el tiempo, etc.). Sabiendo que un automóvil que ha recorrido un trayecto a una velocidad constante de 90 km/h ha tardado 4 horas, es fácil hallar el valor de una de las magnitudes sabiendo que el valor de la otra se ha multiplicado o dividido por un número, como se ha hecho para completar la siguiente tabla:

velocidad (km/h)	90	180	45
tiempo (h)	4	2	8

La constante de proporcionalidad inversa es $k' = 90 \cdot 4 = 180 \cdot 2 = 45 \cdot 8 = 360$ (el significado de la constante de proporcionalidad en este caso es la longitud del trayecto recorrido, 360 km). Si queremos saber cuánto tardaría el automóvil en hacer el mismo recorrido si fuera a 120 km/h y llamamos x al número de horas en esta situación, solamente tenemos que imponer que el producto de los valores de las dos magnitudes sea igual a la constante de proporcionalidad: $120 \cdot x = 360 \;\Rightarrow\; x = \frac{360}{120} = 3\,\text{h}$

Ejemplo 2→ Cuatro personas realizan un trabajo en 18 días. ¿Cuántas personas necesitaremos para realizar el mismo trabajo en 8 días?

	nº de personas	nº de días
1ª situación	4	18
2ª situación	x	8

Razonamos que el número de personas y el tiempo que tardan en hacer el trabajo son magnitudes inversamente proporcionales (doble número de personas hacen el trabajo en la mitad de tiempo)

Para resolver el problema imponemos la igualdad de los productos de las dos magnitudes en las dos situaciones: $8 \cdot x = 18 \cdot 4 \;\Rightarrow\; 8 \cdot x = 72 \;\Rightarrow\; x = \frac{72}{8} = 9$ personas.

Ejemplo 3→ Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 48 animales durante 30 días con una ración de 1,2 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 60 animales si la ración es de 0,8 kg?

Se trata de un problema de proporcionalidad compuesta que podemos convertir en problema de proporcionalidad inversa simple si pasamos de las magnitudes "nº de animales" y "kg de ración diaria de cada animal" a una única magnitud, los "kg de pienso consumidos al día en total"

	nº de animales	ración (kg)	nº de días
1ª situación	48	1,2	30
2ª situación	60	0,8	x

Calculamos el consumo total de pienso al día en la 1ª situación: $48 \cdot 1,2 = 57,6\ \text{kg}$

Calculamos el consumo total de pienso al día en la 2ª situación: $60 \cdot 0,8 = 48\ \text{kg}$

Razonamos que el consumo diario de pienso (kg) y el número de días que dura la cantidad de pienso son magnitudes inversamente proporcionales (a doble consumo diario, mitad de días dura el pienso; si el consumo diario se reduce a la mitad el pienso dura el doble de días)

	kg consumidos cada día	nº de días
1ª situación	57,6	30
2ª situación	48	x

Imponemos la igualdad de los productos de las dos magnitudes en las dos situaciones: $48 \cdot x = 57{,}6 \cdot 30 \;\Rightarrow\; 48 \cdot x = 1728 \;\Rightarrow\; x = \frac{1728}{48} = 36 \text{ días}$

Actividades propuestas 3

1. Tienes que tener claro que entre dos magnitudes no siempre hay una relación de proporcionalidad, y cuando sí existe hay que distinguir si es directa o inversa. Resuelve los problemas de cada apartado, razonando en primer lugar si entre las magnitudes que intervienen en cada problema hay una relación de proporcionalidad directa, de proporcionalidad inversa, o si no hay relación de proporcionalidad:
   1.1. Para hacer un pastel para 4 personas hacen falta 400 g de queso. ¿Qué cantidad de queso es necesaria para hacer pastel para 12 personas?
   1.2. Luisa tiene 12 años y su madre 40. Cuando Luisa tenga 24 años, ¿qué edad tendrá su madre?
   1.3. Un grifo tarda 12 minutos en llenar una bañera. ¿Cuánto tardarán dos grifos?

2. Un agricultor necesita 1200 cajas para envasar sus mandarinas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de medio kilogramo? ¿Y para envasarlas en cajas de 2 kilogramos?
3. Mi coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 1250 km?
4. Cortando cierta cantidad de madera se pueden conseguir 6 paneles de 2,25 m de largo. ¿Cuántos paneles se conseguirían si se cortan de 1,5 m de largo cada panel?
5. Un granjero tiene 300 gallinas y tiene pienso para poder alimentarlas durante 90 días. Si compra 150 gallinas más, ¿para cuánto tiempo tendrá pienso?

2.3. Repartos directamente proporcionales

En este tipo de problemas hay que distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a otras cantidades dadas. Para resolverlos se puede utilizar el razonamiento de reducción a la unidad

Ejemplo→ Tres amigos deben repartirse los 300 € que han ganado en una competición de acuerdo a los puntos que cada uno ha obtenido. El primero obtuvo 7 puntos, el segundo 5 y el tercero 3 puntos. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

El problema de reparto directamente proporcional se inicia sumando los puntos para hallar el total de puntos entre los que hay que repartir el dinero: 7 + 5 + 3 = 15 puntos.

Calculamos el premio por punto: 300 : 15 = 20 €. (razonamiento de reducción a la unidad)

El primero obtendrá 20 • 7 = 140 €.

El segundo: 20 • 5 = 100 €.

El tercero: 20 • 3 = 60 €.

Comprobamos que la suma de las tres cantidades es 300 €, la cantidad total a repartir.

Actividades propuestas 4

1. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
2. Tres socios han invertido 20000 €, 34000 € y 51000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31500 €, ¿cuánto corresponde a cada uno?

2.4. Escalas, aleaciones y mezclas

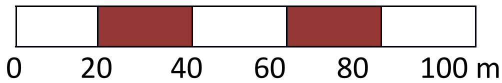
En planos y mapas encontramos anotadas en su parte inferior la escala a la que están dibujados.

La **escala** es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.

Ejemplo→ Si una cierta escala se expresa de la forma 1 : 20000 significa que 1 cm del plano corresponde a 20000 cm = 200 m en la realidad.

Las escalas también se representan en forma gráfica, mediante una barra dividida en segmentos de 1 cm de longitud

Ejemplo→ Esta escala identifica cada centímetro del mapa con 20 m en la realidad es decir 1 : 2000.



Principales calzadas romanas

Una **aleación** es una mezcla de metales para conseguir un determinado producto final. Las aleaciones se realizan en joyería mezclando metales preciosos, oro, plata, platino, con cobre o rodio. La **ley** de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.

Ejemplo→ Una joya de plata de 50 g de peso contiene 36 g de plata pura. ¿Cuál es su ley?

$$\text{Ley} = \frac{\text{peso de metal puro}}{\text{peso total}} = \frac{42}{50} = 0{,}72$$

Otra forma de medir el grado de pureza de una joya es el quilate. Un **quilate** de un metal precioso es 1/24 de la masa total de la aleación. Para que una joya sea de oro puro ha de tener 24 quilates.

Ejemplo→ Una joya de oro de 18 quilates pesa 62 g. ¿Qué cantidad de su peso es de oro puro?

$$\text{Peso en oro} = 62 \cdot \frac{18}{24} = 46{,}5\,\text{g}$$

En los problemas de **mezclas** se combinan distintas cantidades de productos similares pero de distintos precios. Para calcular el precio por unidad de la mezcla hay que calcular el coste total y la cantidad total de la mezcla y dividirlos.

Ejemplo→ Calcula el precio final del litro de aceite si mezclamos 13 litros a 3,5 € el litro, 6 litros a 3,02 €/l y 1 litro a 3,9 €/l.

Calculamos el coste total de los distintos aceites: 13 · 3,5 + 6 · 3,02 + 1 · 3,9 = 67,52 €.

Y el número total de litros: 13 + 6 + 1 = 20 l.

El precio del litro de mezcla valdrá 67,52 : 20 = 3,376 €/l.

Actividades propuestas 5

1. La distancia real entre dos pueblos es 18,5 km. Si en el mapa están a 10 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?
2. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1:300 presenta una altura de 12 cm?
3. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 80 g y contiene 56 g de oro puro
4. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg y 5,20 kg a 6 €/kg.

3. PORCENTAJES

El porcentaje o tanto por ciento es la razón de proporcionalidad de mayor uso en la vida cotidiana.

El **porcentaje** es una razón o fracción con denominador 100. Su símbolo es **%**. El porcentaje como operador se puede expresar con el símbolo %, en forma de fracción o con su valor decimal

Ejemplo→ $24\% = \frac{24}{100} = 0{,}24$

3.1. Problemas de porcentajes

Para **calcular un porcentaje de una cantidad** solamente hay que multiplicar la cantidad por el porcentaje como operador en forma de fracción o como número decimal

Ejemplo→ Para calcular el 24% de 5000, podemos multiplicar primero 5000 por 24 y dividir el resultado entre 100, o dividir primero 24 entre 100 para hallar el valor decimal del porcentaje y multiplicarlo por 5000:

$$\boxed{24\% \text{ de } 5000 = \begin{cases} \frac{24}{100} \cdot 5000 = \frac{24 \cdot 5000}{100} = \frac{120000}{100} = 1200 \\ 0{,}24 \cdot 5000 = 1200 \end{cases}}$$

Algunos porcentajes se pueden calcular mentalmente usando la fracción equivalente simplificada:

- El 50% equivale a la mitad $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
- El 25% es la cuarta parte $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
- El 10% es la décima parte $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
- El 200 % es el doble $\frac{200}{100} = 2$

Para **calcular qué porcentaje representa una parte de un total** se puede utilizar un razonamiento de proporcionalidad directa en el que a la cantidad total le corresponde un porcentaje del 100%

Ejemplo→ Un hotel dispone de 400 habitaciones, de las que 280 están ocupadas. ¿Cuál es el porcentaje de ocupación del hotel?

	total	ocupadas
habitaciones	400	280
porcentaje	100	x

Escribimos la proporción $\frac{280}{400} = \frac{x}{100}$ y pasamos a la igualdad de productos cruzados: $400 \cdot x = 280.100 \Rightarrow x = \frac{28000}{400} = 70$

(El porcentaje de ocupación es del 70%)

Para **calcular la cantidad total sabiendo el porcentaje que representa una parte** se puede utilizar un razonamiento de proporcionalidad directa en el que a la cantidad total le corresponde un porcentaje del 100%. La cantidad total se obtiene multiplicando la cantidad de la parte por la fracción inversa del porcentaje.

Ejemplo→ Un hotel tiene ocupadas 280 habitaciones, que son el 70% del número total de habitaciones del hotel. ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel?

	total	ocupadas
habitaciones	x	280
porcentaje	100	70

Escribimos la proporción $\frac{280}{x} = \frac{70}{100}$ y pasamos a la igualdad de productos cruzados: $70 \cdot x = 280.100 \Rightarrow x = \frac{280 \cdot 100}{70} = 400$

(El hotel tiene 400 habitaciones)

3.2. Problemas de aumento porcentual

Ejemplo→ La población de Robles era en 2012 de 5680 habitantes. En 2013 se ha incrementado en un 5 %. ¿Cuál es su población al final de 2013?

Podemos comenzar a resolver el problema calculando el 5 % de 5680 : $\frac{5 \cdot 5680}{100} = 284$.

La población se ha incrementado en 284 habitantes, luego al final de 2013 será de: 5680 + 284 = 5964 habitantes.

También puede resolverse el problema razonando primero cuál es el incremento porcentual: 100% + 5% = 105%. El valor final es el 105% del valor inicial y para calcular el 105 % de una cantidad multiplicamos la cantidad por 1,05 (índice de variación): 1,05·5680=5964 habitantes.

El número por el que hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la cantidad final tras un aumento porcentual se llama **índice de variación** o **tanto por uno**. El índice de variación es 1 más el aumento porcentual expresado en forma decimal.

3.3. Problemas de disminución porcentual

Ejemplo→ En las rebajas a todos los artículos a la venta les aplican un 20 % de descuento. Calcula el precio en rebajas a partir de los precios iniciales que aparecen en la tabla:

Precio sin descuento	74 €	105 €	22 €	48 €
Precio en rebajas	59,20 €	84 €	17,6 €	38,4 €

Si nos descuentan el 20 %, pagamos el 80 %. Por tanto: $\frac{80}{100} = 0{,}8$ es el **índice de variación,** el número por el que hay que multiplicar los precios sin descuento para calcular el precio rebajado.

En una **disminución porcentual**, el índice de variación o tanto por uno es 1 menos la disminución porcentual expresada en forma decimal. Para calcular una disminución porcentual se multiplica la cantidad inicial por el índice de variación.

3.4. Problemas de porcentajes encadenados

Ejemplo 1→ En unas rebajas se aplica un descuento del 30 %, y el IVA del 21 %. ¿Cuánto nos costará un artículo que sin rebajar y sin aplicarle el IVA costaba 159 euros?

Podemos hacer el ejercicio en dos pasos: Primero calculamos el precio después del descuento del 30% (índice de variación 0,7): 0,7·159=111,30 €. Después aplicamos a esta cantidad un aumento del 21% (índice de variación 1,21): 1,21·111,30=134,673 €

Observa que la cantidad final es el producto de la cantidad inicial por los dos índices de variación, así que podríamos haber realizado todas las operaciones en un solo paso:

0,70 · 1,21 · 159 = 0,847 · 159 = 134,673 € ≈ 134,67 €.

(0,847 es el índice de variación global, el número por el que hay que multiplicar el precio inicial para obtener el precio final después de la disminución y el aumento porcentual encadenados y es el producto de los índices de variación sucesivos)

Cuando se encadenan aumentos y disminuciones porcentuales, el índice de variación global es el producto de los índices de variación de las sucesivas variaciones.

Ejemplo 2→ El precio de un televisor subió un 20 % en diciembre y después se rebajó un 20 % en enero. ¿Cuál ha sido el porcentaje de variación global? Calcula el precio inicial, en noviembre, si el precio final que se pagado en enero es de 432 €

Al subir el precio un 20 % estamos pagando el 120 % y el tanto por uno es 1,2. En el descuento del 20 % estamos pagando el 80 % y el tanto por uno es 0,8. En total con las dos variaciones sucesivas el índice de variación global es 0,8 ·1,2 = 0,96. Hemos pagado el 96 % del valor inicial, luego ha habido un descuento global del 4 % .

Si llamamos x al precio inicial, 0,96·x = 432 ⇨ x = 432 : 0,96 = 450 € era el precio inicial.

Actividades propuestas 6

1. Rellena la siguiente tabla.

En cada columna, el porcentaje, la fracción y el decimal deben ser equivalentes:

Porcentaje	**30%**		
Fracción		**3 / 4**	
Decimal			**0,04**

2. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?

3. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?

4. Un depósito de 2000 litros de capacidad contiene en este momento 1036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?

5. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:

a) "1 de cada 2" b) "tres de cada cuatro" c) "54 de 90"

6. ¿Por qué número debes multiplicar una cantidad para disminuirla en un 25%? Utiliza este índice de variación para calcular el precio final de una artículo que inicialmente costaba 240€ y que se ha rebajado un 25%

7. ¿Por qué número debes multiplicar una cantidad para aumentarla en un 12 %? Utiliza este índice de variación para calcular el precio final de un libro que antes costaba 20€ y cuyo precio ha aumentado un 12%.

8. Halla los valores necesarios para completar los huecos:

a) De una factura de 128 € he pagado 112 €. Me han aplicado un ……… % de descuento
b) Me han descontado el 15 % de una factura de ……………. € y he pagado 382,50 €.
c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 16 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

9. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 430 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 15 %.

10. Un comerciante vende los artículos de su tiende aumentando un 40% el precio de coste. Quiere hacer un precio especial a un familiar y ordena al dependiente que le rebajen un 40% del precio de venta al público. ¿Cuánto pagará el familiar por un artículo que el comerciante compró por 100 €? Si lo que el comerciante quería es que el familiar pagará el precio de coste, ¿qué porcentaje de rebaja debería haber ordenado que le hicieran?

4. INTERÉS BANCARIO

4.1. Interés simple

El **interés** es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo.

En el **interés simple**, al capital *C* depositado se le aplica un tanto por ciento o rédito *r* anualmente.

El cálculo del interés obtenido al cabo de varios años se realiza mediante la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el tiempo que se deposita el capital son meses o días, el interés se calcula dividiendo la expresión anterior entre 12 meses o 360 días (año comercial).

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200}$ tiempo en meses $\qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000}$ tiempo en días

Ejemplo → Depositamos 5400 € a un interés simple de 2,25 % anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 28 meses?

Calculamos el interés simple, $I = \frac{5400 \cdot 2{,}25 \cdot 28}{1200} = 283{,}50$ €, y sumamos capital e intereses para obtener el capital final: 5400 + 283,5 = 5683,5 €

4.2. Interés compuesto

En el **interés compuesto** el dinero pagado como interés se acumula al capital sobre el que se calcula el interés del siguiente pago.

Ejemplo → Si se depositan en un banco Ci euros a un 5% de interés compuesto, el capital final al terminar el primer año será $C_f = C_i + 0{,}05C_i = C_i \cdot (1 + 0{,}05) = C_i \cdot 1{,}05$. Si no se saca del banco, al año siguiente se vuelve a multiplicar por 1,05 y así sucesivamente, al cabo de n años se habrá transformado en $C_i \cdot 1{,}05^n$.

El capital final, al cabo de *n* años de interés compuesto, se obtiene multiplicando el capital inicial por la enésima potencia del índice de variación anual: $\mathbf{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$

Ejemplo → El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto por ciento aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 82000 \cdot 1{,}159\ldots = 95060$ €

Actividades propuestas 7

1. Calcula el interés simple que producen 6000 € en un depósito al 4% durante 2 años.
2. Se depósitan 9500 € en un banco que ofrece un interés simple del 5,5% durante 20 meses. ¿Qué interés se obtendrá?
3. Calcula el interés simple que producen 105000 € al 4,8 % durante 750 días.
4. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39500 €?

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	8	0,75		4,5	100
B		15	6		

a) 160; 0,3; 90; 2000 b) 16, 3, 90, 200 c) 160, 3, 9, 20

2. Con 450 € pagamos los gastos de gas durante 8 meses. En 30 meses pagaremos:

a) 1850 € b) 1875 € c) 1687,5 €

3. Un artículo que costaba 1600 € se ha rebajado a 1400 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:

a) 12,5 % b) 14 % c) 15,625 % d) 16,25 %

4. Para envasar 360 litros de agua, ¿cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 440 botellas b) 280 botellas c) 480 botellas d) 360 botellas

5. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibe 24 toneladas, la segunda es de 10 ha y la tercera de 8 ha recibirán:

a) 16 t y 5 t b) 12,8 t y 16 t c) 16 t y 12,8 t d) 16 t y 11 t

6. Si 6 pintores necesitan 8 días para pintar una casa, 4 pintores necesitarían:

a) 3 días b) 12 días c) 10 días d) 6 días

7. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?

a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos

8. Después de haber aumentado su precio un 40% el precio de un ordenador es 560€. Su precio antes de la subida era:

a) 520 € b) 340 € c) 220 € d) 400 €

9. El precio de un producto aumentó un 15% en 2015 y un 25% en 2016. El porcentaje de aumento global en los dos años ha sido:

a) 40% b) 37,5% c) 30% d) 43,75%

10. Si se aumenta el precio de un producto un 25% y después se rebaja el 25%, el descuento real con respecto al precio inicial antes de la subida es:

a) 0 % b) 15% c) 6,25% d)10%

SOLUCIONES : 1a 2c 3a 4c 5c 6b 7b 8d 9d 10c

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

litros	6,25		0,75	1,4	
euros		15	2,25		4,5

2. Con 76 € hemos pagado 12,5 m de tela, ¿cuánto nos costarán 22,5 m?
3. Para tapizar cinco sillas he utilizado 2,3 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 23 m?
4. Un camión ha transportado en 3 viajes 220 sacos de patatas de 24 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 550 sacos de 30 kg cada uno?
5. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)
6. Por retrasarse dos meses en el pago de una deuda de 1520 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %, ¿cuánto tiene que devolver en total?
7. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1820 € si finalmente se pagaron 1274 €?
8. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483,60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?
9. Por liquidar una deuda de 3500 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 3080 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?
10. El precio de un viaje se anuncia a 907,50 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
11. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 38 € y ahora se paga a 47,12 €?
12. Un mapa está dibujado a escala 1:700000. La distancia real entre dos ciudades es 21 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?
13. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 10 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?
14. Copia en tu cuaderno, calcula la constante de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	4	7,5		3,6	
Magnitud B		12	0,18		10

15. ¿Qué velocidad debe llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?
16. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 vacas durante 9 semanas. Si el granjero vende 60 vacas, a) ¿cuántas semanas le durará el forraje? b) ¿Y si en lugar de vender, compra treinta vacas? c) ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con las 240 vacas?
17. Con doce paquetes de 3,5 kg cada uno pueden comer 80 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

18. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

19. El alquiler de un piso lo pagan tres amigos, a 300 € cada uno. Si se juntasen 5 amigos, ¿cuánto pagaría cada uno?

20. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 15 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

21. En un concurso el premio de 168000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

22. Un trabajo se paga a 3120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

23. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

24. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25400 € al 1,4 % en 10 años?

25. ¿Qué tanto por ciento de ganancias tiene un comerciante que compra un artículo por 600 € y lo vende por 900 €?

26. La mitad de los asistentes a una fiesta no bailan. Los dos quintos de los que no bailan, no lo hacen porque no saben. ¿Qué porcentaje de los asistentes no sabe bailar?

27. En la clase de Ana se han celebrado las elecciones de delegado. El 20% de la clase se ha abstenido en la votación. De los votos emitidos, el 70% ha sido a favor de Ana. En realidad, ¿qué porcentaje de alumnos de la clase ha votado a Ana como delegada?

28. Se ha encargado a un orfebre el diseño y fabricación de un trofeo que ha de pesar 5 kg y ha de estar fabricado con una aleación que contenga tres partes de oro, tres de plata y dos de cobre. ¿Qué cantidad se necesita de cada metal?

29. Antonio da todos los años dinero a sus sobrinos Andrés, Teresa y Pedro, que este año cumplen 16, 14 y 10 años respectivamente, para que se lo repartan proporcionalmente a sus edades. Este año les ha dado 936 €.

a. ¿Cuántos euros recibirá Pedro?

b. Como han subido los precios, este año les ha dado un 4% más que el año pasado. ¿Cuántos euros dio en total Antonio a sus sobrinos el año pasado?

30. Una máquina, trabajando 8 horas diarias, tarda 3 días en fabricar 6000 botellas. Si trabajara 10 horas diarias, ¿cuántos días tardaría en fabricar 5000 botellas? (Idea clave: ¿cuántas botellas fabrica en una hora?)

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES Y EJERCICIOS

ACTIVIDADES PROPUESTAS 1

(1a) 3 (1b) 2 (1c) 630 (1d) 18 (2) 0,5 / 1,9 (3a) 91 (3b) 60

ACTIVIDADES PROPUESTAS 2

(1) 10 € (2) 28 cm (3) 40 km (4) 5/3 ≈ 1,667 kg de azúcar y 10/ 3 ≈ 3,333 kg de fresas (5) 2,4 m

ACTIVIDADES PROPUESTAS 3

(1.1) Proporcionalidad directa: 1200 g (1.2) No hay proporcionalidad: 52 años (1.3) Proporcionalidad inversa: 6 min

(2) 2400 cajas de medio kg; 600 cajas de 2 kg (3) 75 l (4) 9 paneles (5) 60 días

ACTIVIDADES PROPUESTAS 4

(1) 4500€, 2700€, 5400€, 3150€, 2250€ (2) 6000€, 10200€, 15300€

ACTIVIDADES PROPUESTAS 5

(1) 1:185000 (2) 36 m (3) 0,7 (4) ≈5,52 €/kg

ACTIVIDADES PROPUESTAS 6

(1) 30% = 3/10 = 0,3 ; 75% = ¾ = 0,75 ; 4% = 1/25 =0,04 (2) 9 alumnos (3) 25 alumnos (4) 51,8 %

(5a) 50% (5b) 75% (5c) 60% (6) 0,75 es el índice de variación; precio final 180€ (7) índice 1,12 ; 22,40€

(8a) 12,5% (8b) 450€ (8c) 625€ (9) 442,26€ (10) 84€ ; ≈ 28%

ACTIVIDADES PROPUESTAS 7

(1) 480€ (2) 870,83€ (3) 10500€ (4) 70936,32€

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1) Razón de proporcionalidad litros/euro $\frac{1}{3}$

Razón de proporcionalidad euros/litro 3

Litros	6,25	5	0,75	1,4	1,5
Euros	18,75	15	2,25	4,2	4,5

(2) 136,80€ (3) 50 sillas (4) 10 viajes (5) 293,12€ (6) 1702,40€ (7) 30% (8) 620€ (9) 12%

(10) 750€ (11) 24% (12) 3cm (13) 1:3400000

(14) Constante de proporcionalidad inversa 90

magnitud A	4	7,5	500	3,6	9
magnitud B	22,5	12	0,18	25	10

(15) 105 m/h (16a) 12 semana (16b) 8 semanas (16c) 12 semanas

(17) 21 paquetes

(18) magnitudes inversamente proporcionales

A	24	8	0,4	6	3,6	50
B	3	9	180	12	20	1,44

(19) 180€ (20) 16 operarios (21) 84000€, 54600€, 29400€

(22) 1320€, 960€, 840€ (23) 15,21€, 25,36€, 35,50€, 40,57€, 60,86€

(24) 28956€ (25) 50% (26) 20% (27) 56% (28) 1,875 kg de oro, 1,875 kg de plata, 1,25 kg de cobre

(29a) 234€ (29b) 900€ (30) 2 días